

## **Информационные технологии и учебно-исследовательская деятельность школьников<sup>1</sup>**

***Александр Викторович Ляпцев, д-р ф.-м. наук, профессор, зав. кафедрой методики обучения физике РГПУ им. А.И. Герцена, Людмила Анатольевна Ларченкова, канд. пед наук, доцент, Александр Иванович Ходанович, д-р пед.наук, профессор.***

«Умственная деятельность везде является той же самой, на переднем ли фронте науки или в третьем классе школы. Различие здесь в степени, а не в роде. Школьник, изучающий физику, является физиком, и для него легче изучать науку, действуя подобно ученому-физику, чем делать что-либо еще».

*Дж.Брунер*

Одним из приоритетных направлений современного образования является развитие исследовательской компетенции: умения самостоятельно ставить и решать исследовательские задачи.

Компонентами любой исследовательской деятельности, независимо от области приложения, являются: владение умениями выдвижения гипотез и их проверки для исследования простейших явлений, элементарными умениями прогноза, самостоятельного планирования действий для решения задач творческого и поискового характера.

С развитием ИКТ можно говорить об определенных универсальных исследовательских умениях и навыках, связанных с возможностью реализации цикла научного творчества, независимо от конкретного объекта исследования.

Но именно физика, как никакая другая наука, учит анализировать неизвестное и непонятное, устанавливать количественные и качественные закономерности, находить фундаментальные законы, определяющие полную картину явления.

Однако использование богатейших возможностей физики как науки для формирования навыков исследовательской деятельности в практике обучения может вызывать определенные и вполне объективные затруднения.

Во-первых, в силу ограниченности учебного времени полноценное учебное исследование не может быть регулярным в рамках урока, поэтому в урок могут быть включены и отработаны только элементы умений, необходимых для исследовательской деятельности. Однако подготовка учащихся к проведению учебных исследований может и должна проводиться именно на уроках физики, что требует реализации определенных методических подходов, о которых пойдет речь далее.

Во-вторых, большая часть учебно-исследовательской работы учащихся требует самостоятельной работы, а значит должна проводиться в индивидуальном режиме, например, в ходе деятельности ученического научного общества.

---

<sup>1</sup> Другие примеры приведены в Приложении 3 на CD.

В-третьих, особую проблему составляет выбор темы для ученического исследования. Опыт работы авторов в составе жюри различных конкурсов ученических научных работ показывает, что при выборе темы исследовательской работы для учащихся наблюдаются две крайние тенденции: или темы (а, следовательно, и цели, и задачи работы) в погоне за доступностью излишне упрощаются, при этом теряется сам дух исследования, порой оно превращается просто в реферативное изложение информации по проблеме; или наоборот, тема является слишком трудной для учащегося, требует применения значительного количества сведений, выходящих за рамки школьного курса физики, и поэтому не может быть самостоятельно раскрыта учащимися в рамках учебного исследования, а, следовательно, необходимо серьезное вмешательство компетентных взрослых.

В данной работе предлагается вариант организации учебного исследования с применением новых информационных технологий на основе задачного подхода к обучению физике в профильной школе. Использование информационных технологий в этой связи является не данью моде, а отражением изменений, которые объективно произошли в физике в последние десятилетия и связаны с расширением исследовательского инструментария: для исследований кроме теоретических и экспериментальных стали широко применяться вычислительные методы и методы математического моделирования.

В течение длительного времени обучение физике основывалось на использовании учебных задач, решение которых может быть получено аналитическими методами. Повсеместное внедрение компьютеров в процесс обучения привело к возможности постановки учебных задач, решение которых может быть получено в результате численных расчетов.

При этом грамотная методическая работа в этом направлении должна быть связана с обучением учащихся разработке физических и математических моделей явлений природы, проведению комплексных теоретических, экспериментальных и вычислительных исследований этих моделей и правильной интерпретации полученных результатов, что естественным образом опирается на решение физических задач. В такой трактовке обучение элементам компьютерного моделирования является наиболее адекватным методом включения компьютера в обучение, обеспечивающим не только высокий уровень наглядности, но и активные виды учебной деятельности.

Задачный подход к обучению, или «обучение через задачи», представляет собой разновидность проблемного обучения, которое основано на применении системы задач, объединенных между собой общей идеей исследования и ориентированной на получение новых (субъективно) теоретических знаний. При этом система задач должна удовлетворять следующим требованиям [4]:

- допускать возможность различной последовательности рассмотрения предлагаемых задач, позволяя тем самым, достичь необходимого уровня понимания изучаемого вопроса не единственным образом.
- предоставлять возможность для продолжения и развития анализа ситуаций, выходящие за рамки исходной формулировки, путем изменения проблемы и спектра вопросов, переосмысления имеющихся знаний.
- допускать применение физических законов разных методологических уровней.
- содержать задачи, относящиеся к различным разделам физики, но предоставляющие возможность обратить особое внимание на какой-то определенный компонент действий в цикле математического моделирования.
- в условии задачи особое внимание должно обращаться не на исчерпывающую постановку вопроса, а на поиск круга вопросов, на которые можно найти ответы в рамках рассматриваемой модели изучаемого явления.
- необходимым действием должно быть установление области справедливости ответа (границ применимости модели) еще до получения его в явном виде.

Приведем конкретные примеры реализации такого подхода.

**Пример 1. Стрельба из пушки по цели при учете сопротивления воздуха.**

Основой для организации школьного исследования может стать практически любая тема школьного курса, например «Движение тела под действием силы тяжести». Традиционная школьная задача о расчете параметров движения тела, брошенного под углом к горизонту, может быть развита до учебного исследования, если усложнить рассматриваемую модель учетом силы сопротивления воздуха.

Рассмотрим этапы проведения исследования (универсальные для любой тематики) на примере следующей задачи.

*Вычислить начальную скорость ядра для попадания по заданной цели, если сила сопротивления воздуха направлена против скорости ядра и модуль силы прямо пропорционален скорости.*

В результате решения этой задачи должна быть построена модель движения сферического снаряда с учетом сопротивления воздуха и проведено исследование ее свойств модели в результате численного эксперимента. Выполнение исследования может быть проведено в несколько этапов.

*Этап 1. Построение модели.*

Будем считать, что движение происходит в поле тяжести с ускорением свободного падения  $g$ , а сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости  $\vec{F}_{mp} = -Cv^2$ . Векторное выражение для силы сопротивления можно записать в виде:

$$\vec{F}_{mp} = -Cv\vec{v},$$

где  $v$  – модуль мгновенной скорости ядра. Тогда уравнение движения будет иметь вид:

$$m\vec{a} = m\vec{g} - C\vec{v}\vec{v} \quad (1)$$

Вычислительный эксперимент состоит в том, чтобы, подбирая начальные условия для скорости (модуль и направление), попасть в цель, находящуюся в заданной точке, и провести исследование, при каком угле дальность полета будет максимальной.

*Этап 2. Приведение модели к форме, удобной для расчета, и исследование частных случаев.*

Проектируя уравнение (1) на координатные оси ( $x$  – горизонтально по движению снаряда,  $y$  – вверх), получаем систему скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} a_x &= -kv_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ a_y &= -kv_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &\quad - g \\ v_x &= v_{0x} + a_x t \\ v_y &= v_{0y} + a_y t \end{aligned}$$

где коэффициент  $k = C/m$ , а  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ .

Эту систему уравнений необходимо решить при начальных условиях:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \\ y(0) &= 0, \\ v_x(0) &= v_0 \cos \alpha, \\ v_y(0) &= v_0 \sin \alpha, \end{aligned}$$

После этих преобразований задача имеет 4 параметра:  $g$ ,  $k$ ,  $v_0$  и  $\alpha$  - угол, характеризующий направление начальной скорости (угол между вектором начальной скорости и горизонтом). Параметры  $k$  и  $v_0$  предполагается варьировать в процессе вычислительного эксперимента. Однако целесообразно сделать некоторые оценки.

Предположим, что имеется старинная пушка, стреляющая стальными ядрами радиусом 10 см на расстояние до 1 км. Взяв для оценки дальность полета без учета сопротивления воздуха  $S_{\max} = v_0^2 / g$ , получим значение начальной скорости, по отношению к которому далее будет варьироваться ее значение:  $v_0 \approx 100$  м/с. Оценку для коэффициента  $k$  можно получить, исходя из того, что в случае силы трения, пропорциональной квадрату скорости ее значение описывается выражением:

$$F = C_1 v^2 \rho S,$$

где  $\rho$  - плотность воздуха,  $S$  – площадь поперечного сечения обтекаемого воздухом тела,  $C_1$  – некоторый безразмерный коэффициент, зависящий от формы тела. Взяв это выражение за основу, получим для оценки формулу:

$$k = C \frac{\rho}{\rho_c} \frac{1}{R},$$

где  $\rho_c$  – плотность снаряда,  $R$  – его радиус,  $C$  – безразмерный коэффициент. Из этого выражения видно, что коэффициент  $k$  имеет размерность обратную размерности длины. Взяв для оценки  $\rho \approx 1$ ,  $\rho_c \approx 10^4$  (сталь),  $R \approx 0,1$  (все в системе СИ) и  $C \approx 1$ , получим  $k \approx 10^{-3}$ . Это значение можно взять за начальное значение для дальнейшего исследования.

Рассмотрение частного случая с  $k=0$  не представляет трудности, поскольку это обычная школьная задача.

### *Этап 3. Программирование задачи.*

Программирование задачи зависит от используемых средств программирования. Если первые вычислительные машины использовали для программирования коды операций, то позднее появились языки программирования, которые постепенно совершенствовались от языков программирования низкого уровня к языкам программирования высокого уровня. Повышение уровня приводило к облегчению задачи программирования и сокращению времени, необходимого для написания программы. В настоящее время школьники изучают программирование на языках высокого уровня. Однако уже существуют языки программирования сверхвысокого уровня, реализованные в таких вычислительных средах, как Maple, Matlab и др. Такие среды содержат встроенные процедуры, необходимые, в частности, для реализации численных методов, и существенно упрощают процесс программирования.

Этап программирования рассматриваемой здесь задачи целесообразно выполнять, последовательно усложняя задания. Вначале программируются уравнения для координат в зависимости от времени для частного случая с  $k=0$ , на основании чего строится уравнение траектории. Это учащиеся могут сделать практически самостоятельно.

Время полета до цели, находящейся на высоте  $h$  (это значение может быть как положительным, так и отрицательным) вычисляется при заданном значении начальной скорости по формулам (при программировании целесообразно не задавать одну сложную формулу, а использовать рекуррентный метод с несколькими формулами):

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}, \quad h_{\max} = \frac{gt_1^2}{2}, \quad t_2 = \sqrt{\frac{2(h_{\max} - h)}{g}}, \quad t = t_1 + t_2. \quad (2)$$

Программирование в случае  $k=0$  сводится к разбиению всего временного интервала от  $t=0$  до  $t=t_2$  на малые интервалы, так, что образуется массив дискретных значений времени. Координаты снаряда вычисляются для элементов массива  $\{t_i\}$  по обычным формулам:

$$\begin{aligned} x_i &= v_0 \cos \alpha \cdot t_i, \\ y_i &= v_0 \sin \alpha \cdot t_i - \frac{gt_i^2}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Далее можно приступить к реализации расчета с  $k \neq 0$ . Для этого следует использовать точные выражения, приведенные выше. Эти выражения необходимо дополнить связью между проекциями ускорений, скоростей и

координат. При этом конкретные способы программирования зависят от уровня математической подготовки ученика и возможности использовать вычислительные среды при программировании.

Если учащиеся еще не знакомы с понятием производной, то связь между координатами, скоростью и ускорением можно записать в виде:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\Delta x}{\Delta t}, & a_x &= \frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \\ v_y &= \frac{\Delta y}{\Delta t}, & a_y &= \frac{\Delta v_y}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (4)$$

Алгоритм вычисления координат сводится при таком подходе к разбиению всего временного интервала на отрезки  $\Delta t$ , то есть к созданию массива  $\{t_i\}$  и вычисления координат по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + v_{xi} \Delta t, & v_{x,i+1} &= v_{x,i} - k v_{x,i} \sqrt{v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2}, \\ y_{i+1} &= y_i + v_{yi} \Delta t, & v_{y,i+1} &= v_{y,i} - k v_{y,i} \sqrt{v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2} - g, \end{aligned}$$

(значения элементов массивов с  $i=0$  определяются выражениями (1)).

Реализация такого метода (метода конечных разностей) достаточно трудоемка и требует большого времени. Менее трудоемким процесс программирования получается при использовании стандартных процедур решения систем дифференциальных уравнений.

Для этого в формулах (4) следует перейти к пределу  $\Delta t \rightarrow 0$ , так что выражения в правых частях превращаются в производные от соответствующих функций по времени. Использование стандартных процедур не требует навыков аналитического вычисления производных и знания их свойств, достаточно лишь понять, как обращаться к соответствующим процедурам решений систем дифференциальных уравнений, что вполне по силам для учащихся старших классов.

Результаты работы полученной программы целесообразно сравнить с

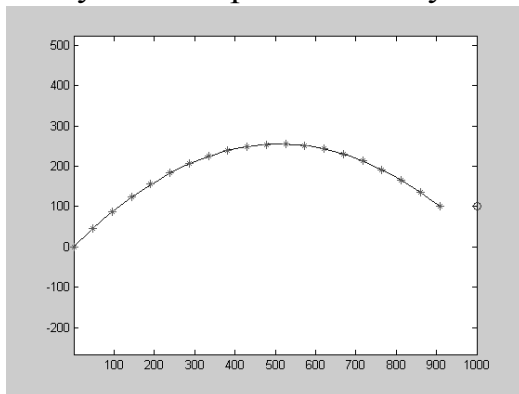


Рис.1. Расчет стрельбы по цели, расположенной на расстоянии 1000 м и на высоте 100 м при начальной скорости снаряда  $v_0 = 100$  м/с, угле  $\alpha = 45^\circ$  и  $k=0$ .

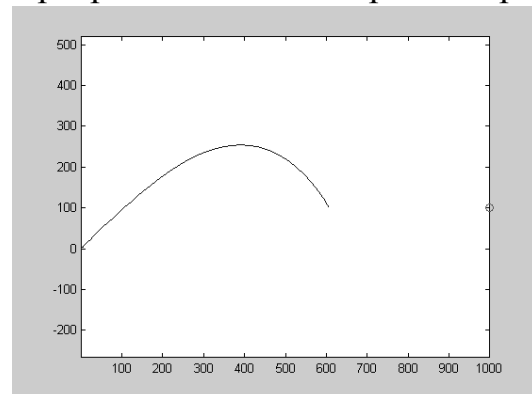


Рис.2. Расчет стрельбы по цели, расположенной на расстоянии 1000 м и на высоте 100 м при начальной скорости снаряда  $v_0 = 100$  м/с, угле  $\alpha = 45^\circ$  и  $k=0,001$ .

результатами вычисления по точным аналитическим формулам

для частного случая с  $k=0$ . Судить о том, насколько несложным и доступным

может быть использование стандартных процедур вычислительных сред, можно на примере листинга программы, написанной в среде Matlab, который приведен в приложении на CD. Ниже приведены выводимые этой программой графики при  $k = 0$  и  $k \neq 0$  (точки на первом графике рассчитаны по формулам (3)).

**Пример 2. Движение в жидкости с «малой» вязкостью.**

Логическим продолжением исследования, описанного выше, может стать типовая «школьная» задача о перемещении лодки при переходе человека с носа на корму, которая может быть рассмотрена на уроке (рис. 3). При этом не учитывается движение воды вместе с лодкой и вязкие свойства жидкости, аналогично тому, как не учитывается вязкость воздуха при рассмотрении движении тел в однородном поле тяжести, в частности при движении снарядов. Но как было показано в примере 1, траектория движения реальных снарядов существенно отличается от параболической, которая получается при пренебрежении вязкостью. Применимость же модели невязкой жидкости никогда не обсуждается.

Рассмотрим, прежде всего, традиционное решение задачи. В пренебрежении силами вязкости никаких горизонтально направленных внешних сил на систему «лодка-человек» не действует. В этом случае горизонтальная составляющая импульса системы остается постоянной. Учитывая, что до начала движения человека эта составляющая была равна нулю, можно утверждать, что в течение всего процесса перехода человека с носа на корму она остается равной нулю, а, следовательно, изменение положения центра масс системы по горизонтали также равно нулю.

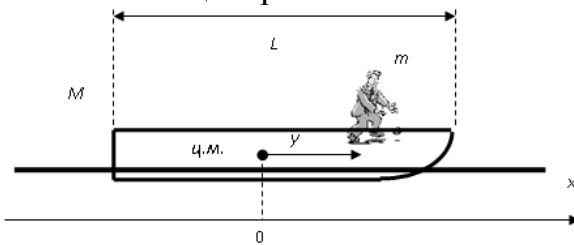


Рис. 3. Задача о движении лодки при наличии вязкости.

Введем связанную с землей систему координат, начало которой совпадает с начальным положением центра масс лодки, и следующие обозначения:  $X_1$  – конечная координата центра масс лодки,  $x_0$  и  $x_1$  – начальная и конечная координата человека относительно

центра масс лодки. Тогда начальная и конечная координата центра масс всей системы вычисляются обычным образом:

$$\begin{aligned} (M + m)R_0 &= mx_0 \\ (M + m)R_1 &= MX_1 + m(X_1 + x_1) \end{aligned}$$

Поскольку центр масс не изменяет своего положения, то  $R_0=R_1$  для конечной координаты центра масс лодки получаем выражение:

$$X_1 = \frac{m}{m + M} (x_0 - x_1) \tag{5}$$

где  $|x_0 - x_1| = l$  – длина лодки, а  $|X_1| = s$  – пройденный лодкой путь.

Теперь уточним модель, введя силу вязкого трения, которая при малых скоростях движения лодки пропорциональна ее скорости  $v$ :

$$F_{\text{тр}} = -\alpha v$$

где  $\alpha$  – коэффициент, характеризующий вязкость жидкости, размеры и форму лодки. Поскольку теперь имеются внешние горизонтальные силы, горизонтальная составляющая импульса системы изменяется по закону:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = F_{\text{тр}}$$

Учитывая, что при малых  $\Delta t$   $v = \frac{\Delta X}{\Delta t}$  где  $X$  - текущая координата центра масс лодки, получим:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = -\alpha \frac{\Delta X}{\Delta t}$$

Это равенство можно переписать в виде:

$$\frac{\Delta(P + \alpha X)}{\Delta t} = 0$$

что означает, что изменение величины  $P + \alpha X$  со временем не происходит. Следовательно:

$$P_1 + \alpha X_1 = P_0 = 0 \quad (6)$$

Анализ полученного равенства дает результаты, которые могут послужить источником дальнейшего исследования. При  $\alpha=0$  последняя формула дает результат, совпадающий с традиционным решением. Однако при  $\alpha \neq 0$  получается, что после того, как лодка остановится ( $P_1=0$ ), она займет первоначальное положение ( $X_1=0$ ), что противоречит результату (5). Причем эти рассуждения остаются справедливыми при сколь угодно малом  $\alpha$ . Если сделать предположение, что в конечном состоянии импульс отличен от нуля ( $P_1 \neq 0$ ), то получается, что нулю должен быть равен коэффициент  $\alpha$ , а это противоречит реальному явлению. При наличии сколь угодно малой вязкости движение лодки тормозится, и она, в конце концов, должна остановиться.

Таким образом, усложнение модели введением вязкости приводит к появлению парадокса: результаты решения для идеальной (не вязкой) жидкости и для жидкости со сколь угодно малой вязкостью получаются качественно различными. Целью дальнейшего исследования и является разрешение возникшего парадокса.

В результате такого исследования можно показать, что понятие малой вязкости можно корректно ввести только при надлежащем анализе всех параметров задачи и введении безразмерных параметров. При этом «невязкая» вода может оказаться вязкой при изменении параметров модели. Парадокс разрешается, что иллюстрируется расчетами, приведенными в [3] и в приложении на CD.

### Пример 3. Взаимозависимое движение тел.

Основой для исследования может послужить школьная задача, которая может быть решена из соображений симметрии.

Четыре черепахи находятся в вершинах квадрата со стороной  $a$ . Они

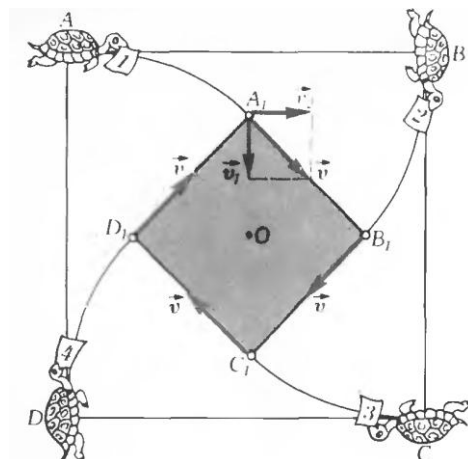


Рис.4 Задача о четырех черепахах



начинают одновременно двигаться с постоянной по величине скоростью  $v$ , причем первая черепаха все время держит курс на вторую, вторая на третью, третья на четвертую, четвертая на первую. Встретятся ли черепахи? Если встретятся, то через какое время? [1]

С точки зрения условия задачи все черепахи полностью равноправны, эквивалентны друг другу. Из соображений симметрии ясно, что в любой момент времени черепахи будут образовывать квадрат, а скорости их будут направлены по сторонам квадрата. Ориентация и размеры таких квадратов будут изменяться со временем – до тех пор, пока квадрат не стянется в точку  $O$  (тогда черепахи и встретятся). Опять-таки из соображений симметрии точка  $O$  – общий центр всех упомянутых квадратов. Для того чтобы найти время  $t$ , через которое произойдет встреча черепах, разложим вектор скорости  $\vec{v}$  черепахи на составляющую  $\vec{v}_1$ , направленную к центру  $O$  (радиальная составляющая), и перпендикулярную составляющую  $\vec{v}_2$  (тангенциальная составляющая). Тогда:

$$t = \frac{a/\sqrt{2}}{v_1} = \frac{a/\sqrt{2}}{v/\sqrt{2}} = \frac{a}{v}$$

Аналогичные рассуждения можно провести для трех черепах, находящихся в углах правильного треугольника со стороной  $a$ .

Ситуация существенно усложняется и требует применения компьютерных расчетов, если от рассмотрения плоского движения перейти к рассмотрению движения в пространстве.

Задача может быть сформулирована, например, так.

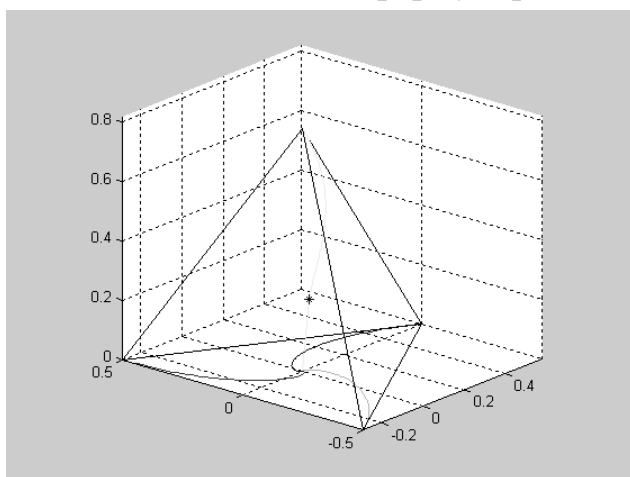


Рис.5 Траектории движения мух, звездочкой помечено положение 4-й мухи в момент времени встречи первых трех мух, первая муха движется из правого угла тетраэдра.

**Полет мух.** В углах правильного тетраэдра находятся четыре мухи. В нулевой момент времени мухи начинают полет, причем модуль скорости каждой из мух постоянен. При полете, первая муха всегда летит в направлении второй, вторая – в направлении третьей, третья – в направлении первой, четвертая – также в направлении первой. Рассчитайте траекторию полета мух. Через какое время мухи встретятся?

Математическая модель, программа и результаты вычислений представлены в приложении на CD. Результаты численного расчета представлены на рис.5.

Особое значение приобретают компьютерные вычисления в тех случаях, когда воспользоваться физическими законами, изучаемыми в школе, невозможно из-за нарушения границ их применимости. Так, например, закон Кулона

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

применим только для точечных электрических зарядов, а, следовательно, сила взаимодействия протяженных заряженных тел, даже правильной геометрической формы, требует более серьезных математических расчетов, которые вполне возможно выполнить компьютерными методами в виде ученической исследовательской работы.

**Пример 4. Взаимодействие заряженных металлических шаров.**

Поставить проблему исследования можно в ходе решения известной задачи из [2, №15.6].

*Почему два разноименно заряженных металлических шара взаимодействуют с большей силой, нежели заряженные одноименно? Возможно ли, чтобы два одноименно заряженных проводника притягивались?*

Качественное объяснение данному явлению можно дать на основе явления электростатической индукции. Действие электрических полей, создаваемых заряженными шариками, приводит к тому, что заряды на шарах, расположенных достаточно близко друг от друга (их нельзя считать материальными точками), перераспределяются. При этом одноименные заряды окажутся на большем расстоянии, чем разноименные, поэтому взаимодействие разноименно заряженных шаров при прочих равных условиях оказывается более сильным. Одноименно заряженные металлические шарики могут даже притягиваться, если заряд одного много больше заряда другого (рис.6, 7).

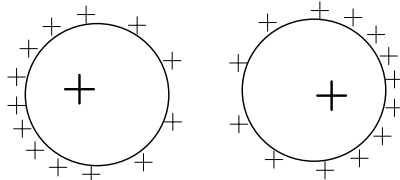


Рис.6 Взаимодействие одноименно заряженных шариков

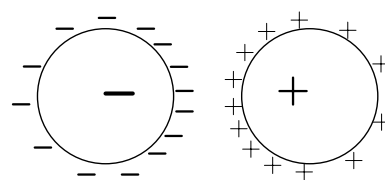


Рис.7 Взаимодействие разноименно заряженных шариков

Логическим продолжением решения этой задачи может быть количественный расчет силы взаимодействия заряженных металлических сфер.

*Вычислите силу взаимодействия двух металлических сфер одинакового радиуса R, заряженных одинаковыми по модулю зарядами. Рассмотрите случаи, когда заряды имеют одинаковые и разные знаки. Постройте графики зависимости силы взаимодействия от расстояния между центрами сфер r.*

Так как при сближении сфер распределение зарядов на них становится несимметричным, то для непосредственного применения закона Кулона необходимо знать поверхностную плотность заряда в каждой точке каждой из сфер.

Избежать необходимости вычисления силы взаимодействия каждой точки одного тела с каждой точкой другого и последующего громоздкого

суммирования можно с помощью метода зеркального изображения. Так, например, решается задача о взаимодействии точечного заряда с бесконечной металлической плоскостью, в соответствии с которым металлическая плоскость заменяется зарядом с противоположным знаком, расположенным зеркально симметрично по отношению к исходному заряду.

Решить поставленную задачу можно, применяя метод зеркального изображения и метод последовательного приближения, на основе которых организуются циклические вычисления с помощью какого-либо пакета математических программ или языков программирования, изучаемых в школе. Подробное решение и полученные результаты представлены в [3] и в приложении на CD. Здесь на рис. 8 приведены результаты численных расчетов, подтверждающие качественные выводы, полученные выше.

На верхнем графике приведены сила взаимодействия разноименно заряженных сфер (нижняя кривая) и сила взаимодействия двух точечных зарядов. Отрицательные значения силы соответствуют притяжению. Заметим, что если исходить из физического смысла, то сила притяжения

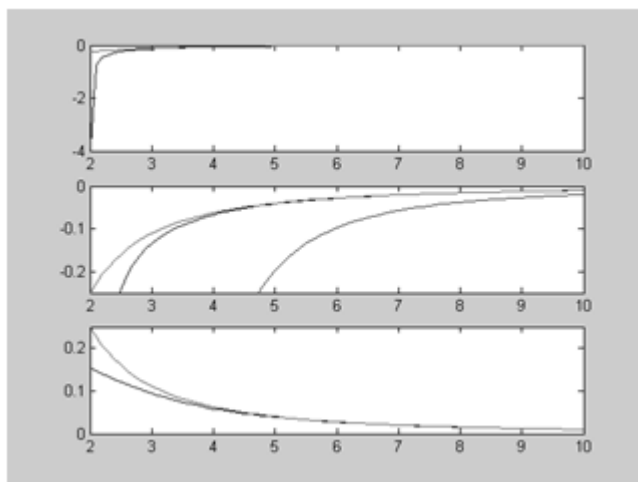


Рис. 8 Результаты численных расчетов

между сферами при  $r \rightarrow 2$  по модулю неограниченно возрастает, поскольку при этом положительный и отрицательный заряды сближаются на бесконечно малое расстояние. Поэтому вычисление ограничено величиной  $r_{min}=2,01$ .

На среднем графике те же величины приведены в ограниченном масштабе по вертикальной оси. Минимальное значение силы ограничено

соответствующим значением для двух точечных зарядов. Самая нижняя кривая соответствует значению силы  $F_n^{(4)}$ .

На нижнем графике изображены значения силы отталкивания двух одноименно заряженных сфер (нижняя кривая) и двух точечных зарядов.

#### Литература:

1. Гельфгафт И.М., Генденштейн Л.Э., Кирик Л.А. 1001 задача по физике с решениями. Учеб. Пособие. – Харьков-Москва., Центр «Инновации в науке, технике, образовании», 1996.
2. Гольдфарб Н.И. Сборник вопросов и задач по физике. М., 1978.
3. Кондратьев А.С., Ляпцев А.В. Физика. Задачи на компьютере. – М.:Физматлит, 2008.
4. Ходанович А.И. Математическое моделирование на компьютере. СПб, Изд-во СПбГУКиТ, 2009 – 118 с.