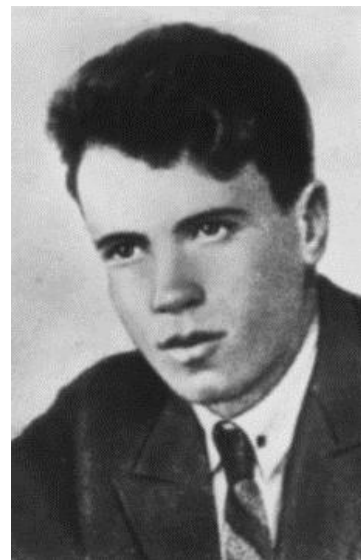


Г. А. Бендриков, Г. А. Сидорова

АЛЕКСАНДР АДОЛЬФОВИЧ ВИТТ

© Г.А.Бендриков, Г.А.Сидорова

В тридцатые годы в нашей стране широким фронтом развернулись работы по исследованию колебаний. Большую роль в развитии основных методов и в пропаганде идей общей нелинейной теории колебаний сыграла школа Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси. Идеи и результаты работ этой школы до настоящего времени лежат в основе исследований колебательных процессов в самых разнообразных механических, радиофизических системах, системах автоматического регулирования и др. Большое значение имели труды и другой известной советской школы — Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова.



А. А. Витт, 1936 г.

В числе выдающихся учеников школы Мандельштама и Папалекси был Александр Адольфович Витт, принимавший участие в разработке нелинейной теории колебаний почти с самого начала развития этого направления. В дальнейшем А. А. Витт выполнил ряд фундаментальных работ по применению нелинейной теории колебаний к колебательным системам с несколькими степенями свободы и к распределенным системам.

Александр Адольфович родился в Москве 12 сентября 1902 г. в купеческой семье. Его отец — Адольф Карлович (1867—1942) — после Октябрьской революции служащий предприятия «Шарикоподшипник». Мать Лидия Карловна (1881—1944) некоторое время работала в коллекторе Наркомпроса.

В детстве Саша был веселым, озорным, любил смешные розыгрыши и шутки, был предводителем среди детей. Учился он далеко не по всем предметам одинаково, но по математике и физике был одним из первых. В юности характерной чертой Саши были серьезное отношение к учебе, к жизни.

Он закончил Московскую советскую трудовую школу 2-й ступени № 31 (бывшую Петропавловскую гимназию) в 1920 г.

В июле того же года Александр зачисляется слушателем Московского университета на физико-математический факультет естественного отделения. В университете Сашу Витта любили и уважали за живой склад ума, за пытливость, за поиск в науке. У него было много друзей.

Одновременно с обучением на первых двух курсах он находился на военной службе (вступив добровольцем в ряды Красной Армии). Сначала он закончил Военную Аэрофотошколу, затем служил в Главном управлении Воздушного флота начальником статистического отделения (1921—1922 гг.). Уволился из армии в бессрочный отпуск, чтобы своевременно окончить университет. В 1924 г. Витт учился в Высшей Аэрофотограмметрической школе Красного воздушного флота им. НКПС. Эта школа была создана при Главвоздухофлоте для подготовки специалистов по аэросъемке и расшифровке фотоснимков. На старших курсах Витт активно участвовал в семинаре проф. А. К. Тимирязева по статистической физике. Дипломную работу в университете Александр Адольфович выполнял под руководством А. С. Предводителя. В июле 1924 г. он окончил математическое отделение физико-математического факультета МГУ по специальности физика и был оставлен в аспирантуре. По дипломной работе Витта, посвященной исследованиям фотоэффекта, была опубликована, совместно с А. С. Предводителевым, статья [1]. Позже, также совместно с А. С. Предводителевым, была выполнена работа по химической кинетике [3, 4].

В аспирантуре А. А. Витт включился в работу группы теоретиков, работая совместно с А. А. Андроновым под руководством проф. Л. И. Мандельштама. Первые теоретические работы Витта в области колебаний «Двухпроводная антенна Бевереджа» и «Неоднородная нагруженная антенна» были опубликованы в 1926 и 1928 г. [2, 5]. В 1929 г. Витт окончил аспирантуру в НИИ Физики и начал работать на физико-математическом факультете.

В том же 1929 г. Витт был рекомендован для заграничной стажировки. В связи с этим Мандельштам дал ему такую характеристику:

«Я считаю его [Витта] вполне подготовленным для заграничной поездки. Он обладает несомненными способностями к научной работе, достаточно солидным образованием, является хорошим математиком и вполне

владеет немецким языком. По его работам ему близки и научно-технические вопросы (научная радиотехника), и вопросы современной физики. Я считал бы поэтому желательным, чтоб его заграничное пребывание протекало под руководством крупнейших теоретиков в той и другой области (Зоммерфельд в Мюнхене и Борн в Геттингене). Ввиду его ясно выраженных математических дарований, надо, мне кажется, предпочесть руководство именно этих первоклассных физиков-математиков» (Архив МГУ, ф. 24, ед. хр. 235). Командировка не состоялась, но эта характеристика позволяет составить представление об А. А. Витте в начале его научного пути.

С 1 февраля 1931 г. А. А. Витт был зачислен научным сотрудником I разряда НИИ Физики МГУ. С 1931 г. он работал доцентом. Со времени поступления в аспирантуру Витт успешно выполнил целый ряд основополагающих работ совместно с А. А. Андроновым, С. П. Шубиным, С. Э. Хайкиным, Г. С. Гореликом, Л. С. Понтрягиным, Г. Ф. Гаузе и др. В 1934 г. Витт за большие научные достижения был избран действительным членом НИИ Физики. 15 февраля 1935 г. он был утвержден ВАК НКП доктором физико-математических наук и с этого времени работал профессором кафедры колебаний. С 1 июля 1935 г. Витт был зачислен консультантом Межинститутского биофизического объединения. С 1 сентября 1935 г. Витт начал вести курс теории колебаний на физико-математическом факультете.

На кафедре колебаний Александр Адольфович вел большую научную и педагогическую работу, был активным участником семинаров по теории колебаний и теоретической физике, проводимых в течение многих лет Мандельштамом. Лекции и семинары Мандельштама собирали большую аудиторию специалистов в области колебаний и физиков, работавших в разных вузах и НИИ. Вместе с Андроновым, приезжающим из Горького, Витт участвовал в семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений, руководимом на механико-математическом факультете проф. В. В. Степановым. Александр Адольфович активно участвовал в работе I Всесоюзной конференции по колебаниям в ноябре 1931 г. в Москве; был участником I Всесоюзного съезда в 1930 г. в Харькове и II Всесоюзного математического съезда в 1934 г. в Ленинграде. Витт активно участвовал в заседаниях физической секции АН СССР.

Очень интересно и плодотворно проходил аспирантский семинар Витта по теории колебаний для дневной аспирантуры. Его участниками были С. П. Стрелков, А. П. Скибарко, Г. Б. Петросян, П. А. Рязин, Л. М. Белявская, Е. Н. Секерская и др. Здесь рассматривались различные вопросы нелинейной теории колебаний. Содержание докладов было опубликовано в журналах [43—45], а часть материала вошла в книгу «Теория колебаний» [35].

В те годы большое значение имело распространение «нелинейной концепции» в радиофизике. Поэтому была создана вечерняя аспирантура для ведущих инженеров ряда НИИ. В 1933—1934 гг. Витт руководил семинаром по теории колебаний для аспирантов-вечерников. Кроме того, он проводил консультации для аспирантов Теплотехнического института.

Под руководством Витта защитили диссертации П. А. Рязин [46] и А. Е. Безменов [47]. Александр Адольфович руководил аспирантами дневного отделения (Г. А. Бендриков, Г. Д. Малюжинец, Г. Б. Петросян, Е. Н. Секерская) и аспирантами вечернего отделения (А. Е. Безменов, И. А. Домбровский и др.).

Кроме аспирантских семинаров по теории колебаний Витт вел семинарские занятия со студентами старших курсов кафедры теории колебаний. Совместно с доц. А. А. Померанцевым Витт читал для студентов-теплофизиков основной курс «Теория тепла» [48]. Первая часть этих лекций была посвящена общим положениям математической физики, вторая — теории теплопроводности и конвекции.

Витт был очень способным математиком и физиком. В лаборатории его считали компетентным консультантом по самым сложным и тонким вопросам математики. Перед отправлением в печать авторы обсуждали с Виттом свои работы. Его математическую эрудицию, высоко ценил Б. А. Введенский (в те годы член-корр. АН СССР), нередко обращавшийся к нему по различным вопросам математики.

На I Всесоюзной конференции по колебаниям в докладе Андронова перед математиками был поставлен ряд задач, решения которых требовала техника и теория колебаний. Профессор механико-математического факультета МГУ М. И. Ельшин вспоминает, что на семинаре проф. Степанова Андронов формулировал эти задачи, а Витт тут же предлагал пути их решения. Как правило, именно таким путем и решались эти задачи впоследствии.

Один из авторов имел счастливую возможность совместно работать с А. А. Виттом. Поражало почти мгновенное понимание физики явления и здесь же строгая математическая формулировка задачи. Под руководством Витта было проведено экспериментальное исследование «прерывистой» генерации и автоколебаний в распределенной системе. Был получен и продемонстрирован ряд интересных результатов [49, 32]. Эксперимент по исследованию автоколебаний на плоскости медленно изменяющихся переменных Ван-дер-Поля был продемонстрирован И. и Ф. Жолио-Кюри при посещении ими физического факультета в 1934 г. Особенно понравился гостям эксперимент с переходом распределенного генератора с одной волны на другую при нагрузке в пучности срываемого колебания [32].

Профессор С. П. Стрелков часто рассказывал, как Витт, сидя на скамейке Сретенского бульвара, обдумывал, выкурив десяток — другой папирос, ход решения задачи, а после этого садился и писал статью. Сегодня поставлена задача, а завтра утром — готова статья. В семье Андроновых до сих пор помнят шуточную терминологию: «читать книги по методу Витта». Книга лежит на столе, «читающий» на диване и обдумывает, что же может быть написано в ней.

В начале тридцатых годов Витт работал по совместительству во Всесоюзном электротехническом институте им. Ленина (ВЭИ), а также доцентом и затем профессором кафедры радиотехники (с 1934 г.) в Московском электротехническом институте связи (МЭИС).

А. А. Витт вел общественную работу, руководил научными кружками студентов, увлекался теннисом и лыжами. В 1935 г. он женился на Ольге Алексеевне Небурчиловой (1907—1964).

Александр Адольфович Витт скончался 26 июня 1938 г.

* *
*

Перейдем к рассмотрению фундаментальных результатов, полученных А. А. Виттом (самостоятельно и совместно с другими авторами) в области исследования колебательных систем. Многие из этих результатов в дальнейшем определили новые направления в акустике, радиофизике, автоматике и других разделах науки и техники. Эти работы посвящены

исследованию линейных систем, устойчивости автоколебаний, статистике, распределенным автоколебательным системам, теории релаксационных и близких к гармоническим автоколебаний, биофизике, параметрическим колебаниям (параметрическая связь), действию внешней силы на автоколебательные системы. Большую роль сыграли обзорные работы и особенно труд «Теория колебаний» [35—37], одним из авторов которого был Витт. Этот труд в большой мере определил дальнейшее развитие нелинейной теории колебаний.

Как уже говорилось, первое научное исследование Витта было посвящено явлению фотоэффекта. Статья «К вопросу о фотоэлектрической утомляемости» была опубликована (совместно с А. С. Предводителевым) в 1926 г. [1]. В ней теоретически и экспериментально проанализирована связь между поглощаемым светом и количеством адсорбированного металлом газа. В следующей совместной с А. С. Предводителевым работе [3, 4] исследовалась кинетика образования комплексных соединений в гетерогенной среде газ — твердое тело. Эти статьи, относящиеся, на первый взгляд, к различным физическим проблемам, объединяет одна принципиально важная сторона — изучение коллективных взаимодействий атомов и молекул. В процессе этих исследований был открыт ряд интересных закономерностей, в том числе — периодическое протекание рассматриваемых химических реакций. Как писал Предводителю академик АН БССР Б. В. Ерофеев по поводу первых работ по кинетике дегидратации комплексных химических соединений, в том числе и по поводу названных статей [1, 3, 4], эти работы имели определяющее значение для дальнейших исследований в данной области.

В 1925 г. профессором теоретической физики 1-го МГУ и действительным членом Исследовательского института физики и кристаллографии избирается Л. И. Мандельштам. В теоретическом кабинете под его руководством собираются уже известные в то время ученые и талантливая молодежь: М. А. Леонтович, А. А. Андронов, С. Э. Хайкин, С. П. Шубин и др. Становится учеником Мандельштама и А. А. Витт.

Мандельштам предлагает несколько тем, посвященных актуальным в то время вопросам дальнего приема. В своей первой работе, выполненной под его руководством, Витт исследовал теорию процессов, происходящих в двухпроводной антенне [2]. Здесь был использован принцип взаимности,

сформулированный Мандельштамом. В следующей статье [5], посвященной аналогичным вопросам, рассматривалась неоднородная нагруженная антенна, емкость и самоиндукция которой считались заданными функциями координат. В этой работе применялись теоремы Куранта — Гильберта. С помощью того же аппарата в 1931 г. Витт совместно с Шубиным исследовал колебания двумерной системы — мембраны, закрепленной в конечном числе точек [11]. Эта задача возникла при исследовании уравнения Шредингера для идеального одноатомного газа. Эренфест показал, что закрепление круговой мембраны в центре не влияет на высоту ее основного тона. Витт и Шубин доказали, что закрепление мембраны в конечном числе любым образом расположенных точек также не влияет на частоты колебаний мембраны. В дальнейшем А. А. Самарский уточнил понятие закрепления мембраны в отдельных точках и обобщил двумерную задачу на пространственную [50].

Названные работы Витта [2, 5, 11] посвящены линейным распределенным системам. По свидетельству Андропова [41], Мандельштам «очень интересовался всеми возможностями преодоления вычислительных трудностей» в случае систем с многими степенями свободы и распределенных систем — теорией возмущений, операторным методом Хевисайда, различными рецептами для составления векового уравнения, теоремами Фишера — Куранта и т.д. Статьи [2, 5, 11] свидетельствуют, что Витт прекрасно владел этим математическим аппаратом. Эти работы имели и непосредственный практический выход.

Примерно с 1927 г. Мандельштам и руководимая им группа сотрудников обращаются к проблемам нелинейной теории колебаний. До этого подобные исследования были немногочисленны. Основными их центрами можно назвать Германию (Баркгаузен, 1907—1921) и Голландию (Ван-дер-Поль, 1922—1929). Кроме того, в 20-е годы в Нижнем Новгороде под руководством М. А. Бонч-Бруевича проводились работы по теории лампы и спусковых схем. Интересные результаты, полученные этими исследователями, были главным образом направлены на объяснение экспериментов и не были строго обоснованы. Поэтому можно сказать, что до работ группы Мандельштама теория колебаний существовала прежде всего как линейная теория. «Успехи линейной теории были очень велики, и именно они затруднили отход от линейной точки зрения, потребовали аргументированного обоснования

необходимости нелинейного подхода к нелинейным колебательным явлениям. Всесторонняя аргументация необходимости адекватного рассмотрения нелинейных явлений и выяснение наличия принципиальных различий между линейными и нелинейными явлениями является заслугой школы Л. И. Мандельштама — А. А. Андропова» [51].

Математическим фундаментом для создания нелинейной теории колебаний послужили три направления: качественная (топологическая) теория дифференциальных уравнений, метод малого параметра А. Пуанкаре и теория устойчивости А. М. Ляпунова. Развитие этих направлений относится примерно к одному периоду — концу XIX в. Использование методов Пуанкаре — Ляпунова в нелинейной теории колебаний было заслугой школы Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси. Благодаря этой школе, начиная приблизительно с 1930 г., основной центр исследований по теории нелинейных колебаний находится в СССР [41].

Первое краткое сообщение из цикла работ по нелинейным колебаниям «Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний» было сделано Андроновым в 1927 г. на IV съезде русских физиков [52]. В 1929 г. Андронов закончил аспирантскую работу по этой же теме. К этому времени относится начало плодотворного сотрудничества Андропова и Витта. Особенно большую роль сыграл математический талант Витта в разработке метода малого параметра и приложениях теории устойчивости Ляпунова. Вот как характеризовал Андронов стиль его работы: ««Импрессионист», — как говорил о нем Л. И. Мандельштам, — А. А. Витт мало интересовался деталями, но обычно сразу видел окончательный результат и умел до него с необыкновенным оптимизмом добираться. Его оптимистический девиз «все плохое сократится, все хорошее останется» — помог преодолеть многие трудные выкладки, которые в конце концов приводили к простым и физически прозрачным окончательным формулам».

Начиная с 1930 г., выходит большое число работ Андропова и Витта, совместных и написанных отдельно, по математической теории нелинейных явлений в ламповом генераторе. Каждая из них была значительным вкладом в теорию колебаний и нередко вызывала к жизни новые научные направления. После того как было указано на соответствие между незатухающими колебаниями в системах с одной степенью свободы и предельными циклами

Пуанкаре [52], следующим важным этапом стало применение метода малого параметра в сочетании с теорией устойчивости Ляпунова к отысканию периодических решений и исследованию их устойчивости в системах неконсервативных, но близких к консервативным. Этим методом удалось обосновать уже известные и получить ряд новых важных результатов. Прежде всего это относится к явлению захватывания.

Математическая теория захватывания (принудительной синхронизации) лампового генератора периодической внешней силой исследовалась Виттом совместно с другими авторами в ряде работ [6, 8, 12, 19]. В первой из них [6] с помощью качественной теории Пуанкаре исследуются укороченные уравнения Ван-дер-Поля для лампового генератора с контуром в цепи сетки, на который действует внешняя синусоидальная ЭДС. В этой работе впервые качественная теория Пуанкаре применялась непосредственно к укороченным уравнениям Ван-дер-Поля, а не к исходным уравнениям движения, что оказалось плодотворным и впоследствии использовалось в работах других авторов [53]. Важным результатом явилось доказательство отсутствия порога захватывания: захватывание наблюдали при сколь угодно малой внешней силе.

Спустя некоторое время А. А. Витт и С. Э. Хайкин экспериментально подтвердили основные выводы математической теории, в том числе отсутствие порога при захватывании [12]. Благодаря этому оказалось возможным использовать явление захватывания для измерения малой напряженности полей. Был предложен и совместно с инженером Е. Н. Майзельсом [19] разработан новый метод измерения напряженности полей радиостанций. Эксперименты проводились в НИИ Физики МГУ и в ВЭИ.

Результаты работ по захватыванию [12, 19] были перенесены в акустику, и в 1931 г. К. Ф. Теодорчик и С. Э. Хайкин открыли явление акустического захватывания. На основе этого явления был также разработан новый метод измерения интенсивности звуковых полей [41, 54, 55].

В статье «К математической теории захватывания» [8] Андронов и Витт методом малого параметра находят периодические решения для системы, близкой к линейной консервативной, при произвольном виде нелинейной характеристики и исследуют устойчивость решений по отношению к малым

отклонениям. Результаты применения общих формул в частном случае кубической характеристики совпадают с полученными Ван-дер-Полем.

В работах [6, 8] был впервые сформулирован качественно новый подход к такому существенно нелинейному явлению, как захватывание. Они имели исключительное значение для дальнейшего развития нелинейной теории колебаний и были продолжены многими авторами. Анализ фазовых соотношений при захватывании проводили Г. Б. Петросян, П. А. Рязин и К. Ф. Теодорчик [56]. Поведение автоколебательной системы под действием двух гармонических сил изучал под руководством Витта Петросян [60, 61]. Рязин, также под руководством Витта, детально исследовал принудительную синхронизацию лампового генератора: процессы установления режимов синхронизации (биения); механизм перехода из этих областей в область синхронизации при непрерывном изменении параметров схемы. Он показал, что принудительная синхронизация является существенно нелинейным явлением [45, 57]. В то время шла дискуссия между сторонниками принятого в радиотехнике так называемого квазилинейного метода и представителями нелинейной школы. Рязин на примере синхронизации при отношении частот 1:2 доказал, что в режиме биений принцип суперпозиции нарушается: для стандартного режима характерен сложный спектр, состоящий из нескольких тонов с амплитудами примерно одного порядка величины. Таким образом, «квазилинейные» представления о биениях как о бигармоническом режиме оказались несостоятельными. Исследование принудительной синхронизации автоколебательных систем стало предметом кандидатской диссертации Рязина [46], выполненной под руководством Витта.

Другой ученик Витта, А. Е. Безменов (аспирант в группе вечерней аспирантуры), разобрал и, где было возможно, обосновал «квазилинейные» методы Баркгаузена, Мёллера и Йоса с точки зрения нелинейной теории Андронова-Витта [58]. Затем Безменов методами Андронова-Витта исследовал поведение лампового генератора при изменении параметров схемы и построил при различных видах аппроксимации характеристики лампы так называемые диаграммы срыва Рукопа — диаграммы зависимости условий самовозбуждения от параметров схемы [59, 47].

В дальнейшем методы Андронова-Витта в применении к теории захватывания были развиты и усовершенствованы Р. В. Хохловым. В 1954 г.

он предложил метод «вторичного упрощения» укороченных уравнений [62, 63]. Используя этот метод, удалось провести детальный анализ синхронизации генератора модулированными сигналами, решить задачу о связанных отражательных клистронах с плавной электрической перестройкой частоты, исследовать устойчивость молекулярного генератора и др. Метод вторичного упрощения, или вторичного укорочения, широко применялся и применяется для анализа различных нелинейных систем [64].

Исследование механизма принудительной синхронизации томсоновских систем гармоническим внешним воздействием было продолжено сравнительно недавно под руководством В. В. Мигулина [65].

Математический аппарат для изучения нелинейных явлений, представленный в основополагающих работах по теории захватывания Андронова и Витта [6, 8], впоследствии широко применялся в различных задачах, например, при исследовании систем с периодически меняющимися параметрами (В. П. Гуляев, В. В. Мигулин [66]), при исследовании синхронизации сигналом произвольной формы (К. Ф. Теодорчнк, И. И. Минакова [67]), а также вынужденных колебаний с двумя степенями свободы (И. Л. Берштейн, Е. Иконников [68]). Исследование процессов в кольцевом газовом лазере [69], явление захвата электронов в ускорителях [70], синхронизация биологических ритмов, взаимная синхронизация оптических квантовых генераторов — вот далеко не полный перечень применения методов Андронова — Витта, разработанных для анализа принудительной синхронизации.

В работах по теории захватывания рассматривались периодические движения в автоколебательной системе. Если частота внешнего воздействия не равна и не кратна собственной частоте системы, возникают квазипериодические колебания. В статье [7] доказываются теоремы о наличии произвольных фаз у квазипериодических движений в автономном случае и в случае системы, периодически зависящей от времени. Определяется максимальное число независимых периодов для квазипериодических движений в обоих случаях. Результаты этой работы впоследствии обобщил на почти периодические движения общего типа Л. С. Понтрягин [53].

Условие устойчивости квазипериодических движений по Ляпунову в неавтономной системе было выведено Виттом в статье «Об устойчивости

квазипериодических движений» [13]. Витт исследовал также устойчивость квазипериодических движений в ламповом генераторе с жестким режимом установления, находящемся под воздействием внешней синусоидальной ЭДС, период которой не равен и не кратен периоду системы (асинхронное возбуждение) [20]. (Сами квазипериодические решения при асинхронном возбуждении были получены Мандельштамом и Папалекси [71]). Продолжением и дальнейшим развитием этой работы Витта явилось исследование Е. Н. Секерской регенеративного приемника с жестким режимом возбуждения, находящегося под воздействием внешней синусоидальной ЭДС [44]. Эта задача развилась из задачи, предложенной Виттом на руководимом им аспирантском семинаре по теории колебаний. Были найдены зависимость амплитуды от расстройки и условия устойчивости решений вдали и вблизи от резонанса.

После исследования автоколебательных систем с одной степенью свободы, находящихся под действием внешней силы, естественно было применить аналогичные методы для анализа автоколебательных систем с двумя степенями свободы [9, 23, 24]. Первую (математическую) часть работы [23, 24] составляет отыскание амплитуды периодических решений в автоколебательной системе с двумя степенями свободы и исследование их устойчивости. Во второй части в качестве примера рассматриваются автоколебания двух связанных контуров, один из которых самовозбужден. Эта задача, поставленная еще Ван-дер-Полем, впервые решалась достаточно строго (для случая сильной связи между контурами). В статье [9] кратко изложены результаты первой части.

Впоследствии под руководством Витта была выполнена работа А. П. Скибарко и С. П. Стрелкова «Качественное исследование процессов в генераторе по сложной схеме. К теории затягивания по Ван-дер-Полю» [43]. Колебания в системе с двумя степенями свободы, находящейся под воздействием внешней силы с частотой, приблизительно в n раз превышающей одну из частот автоколебательной системы ω_1 и ω_2 , исследовал С. М. Рытов [72].

Особо важное место в теории нелинейных колебаний принадлежит работам Андронова и Витта, посвященных устойчивости по Ляпунову [17, 18]. В них частично излагается второй метод Ляпунова в применении к

автоколебательным системам и формулируются новые теоремы. Известно, что задача об устойчивости периодического движения сводится к вычислению характеристических показателей, которые являются корнями характеристического уравнения приведенной системы. В статьях [17, 18] геометрически доказана теорема об устойчивости периодических движений автономной системы, описываемой дифференциальными уравнениями первого порядка: достаточным условием устойчивости по Ляпунову в этом случае является отрицательность $(n-1)$ характеристических показателей рассматриваемого периодического движения, где n — порядок характеристического уравнения. «Эта теорема весьма существенна для приложения теории Ляпунова к автономным системам. Именно эта теорема позволяет сразу сформулировать условия устойчивости автоколебательного периодического процесса» [53]. В дальнейшем эта теорема, известная в литературе как теорема Андронова-Витта, была обобщена на неавтономные системы Н. Ф. Отроковым [73] и И. Г. Малкиным [74]. Она использовалась (и до сих пор используется) для исследования устойчивости периодических решений так часто, что невозможно перечислить все ссылки на эти работы. Эта теорема вошла в классические монографии и учебники по теории устойчивости [75—77]. В «Лекциях по математической теории устойчивости» В. П. Демидовича [77] доказывается формулировка теоремы — аналога теореме Андронова-Витта. Анализируя состояние проблемы устойчивости в теории автоматического регулирования, А. М. Лётов [78] отнес работы Андронова-Витта [17, 18] к основным результатам в теории устойчивости при исследовании так называемых критических случаев (когда имеются характеристические показатели, равные нулю, а остальные показатели имеют отрицательную действительную часть).

Итак, теория нелинейных колебаний, основанная на применении предельных циклов Пуанкаре и метода малого параметра, в сочетании с теорией устойчивости Ляпунова оказалась весьма плодотворной, особенно для систем, близких к линейным консервативным. Качественно новый подход потребовался от исследователей при переходе к анализу разрывных колебаний. В качестве примера системы, генерирующей подобные колебания, был взят так называемый мультивибратор Абрагама-Блоха. Ранее эту систему исследовал Ван-дер-Поль, но лишь в предположении симметричности

процессов в мультивибраторе. Андронов и Витт избрали более общий подход, позволяющий исследовать и несимметричную схему, основанный на качественной теории дифференциальных уравнений. В процессе исследования было обнаружено, что в схеме существенную роль играют малые, «паразитные», параметры, учет которых привел бы к усложнению (повышению порядка) дифференциальных уравнений. По предложению Мандельштама были введены «условия скачка», заключающиеся в том, что в определенные моменты времени в схеме (без емкости) происходит скачок тока при постоянстве энергии. Применяя обычное непрерывное рассмотрение в комбинации с условиями скачка, можно выделять разрывные периодические движения, определить их амплитуды и период [32]. Для мультивибратора Абрагама-Блоха подобный путь решения дает два уравнения первого порядка, которые далее исследуются на фазовой плоскости [10]. Этим способом был исследован не только установившийся режим, но также и процессы установления в несимметричном мультивибраторе Абрагама-Блоха. Полученные результаты качественно подтвердил на опыте М. А. Дивильковский [32].

«Разрывную» трактовку оказывается возможным применять не только в тех случаях, когда один из колебательных параметров мал. И при наличии в контуре как емкости, так и самоиндукции все же возможны случаи, когда в некоторых областях скорость изменения состояния настолько велика, что можно движение с большой, но конечной скоростью, заменить скачком и определить конечный результат движения в этой области при помощи скачка [32, 79].

Продолжением исследования Андропова и Витта о мультивибраторе явились, в частности, две работы: диссертация В. В. Виткевича [80], выполненная под руководством Хайкина, и работа М. Д. Карасева и М. Л. Селезневой [81]. В этих работах исследованы возможные режимы в симметричном и несимметричном мультивибраторе, теоретически и экспериментально показана возможность четырех качественно различных режимов, два из которых «жесткий» и «срывающихся автоколебаний» — ранее не были известны. Н. А. Железцов и Л. В. Родыгин вывели условия скачка из дифференциальных уравнений, написанных с учетом паразитных

емкостей, и дополнили прежнюю теорию в некоторых существенных пунктах [82, 83].

В январе 1933 г. в Париже состоялась «Международная нелинейная конференция», на которой присутствовали: Ван-дер-Поль (Голландия), Льенар, Картан, Эксклагон, Абрагам, А. Бриллюэн, ле Корбелье (Франция) и другие видные математики и физики из различных стран [84]. От Советского Союза на конференцию были приглашены Л. И. Мандельштам, Н. М. Крылов, П. Д. Папалекси, А. А. Андронов и А. А. Витт. Однако принять участие в конференции смог лишь Папалекси. На конференции отмечалось, что нелинейные колебательные явления приобретают все большее значение во всех областях чистого и прикладного знания, как в физике, математике, акустике, биологии и т. д., так и в их применениях [84]. Выступавшие на конференции ученые дали высокую оценку работам советских ученых, в том числе работам Андропова и Витта в области теоретической разработки качественной теории дифференциальных уравнений и применения ее, а также метода малого параметра к анализу явлений захватывания. В своем докладе Папалекси особо отметил «возможность обобщения понятий периодических решений и предельных циклов на случай разрывных периодических решений», что показали Андронов и Витт в теории мультивибратора Абрагама — Блоха [10, 84]. О значении разрывной трактовки не раз упоминалось в различных обзорных статьях и в последующие годы (например, [85]).

В тридцатые годы появилось еще одно важное направление в нелинейной теории колебаний. По инициативе Мандельштама были начаты исследования флуктуационных явлений в автоколебательных системах. В 1933 г. в ЖЭТФе была опубликована первая работа на эту тему. Это была статья Л. С. Понтрягина, А. А. Андропова и А. А. Витта «О статистическом рассмотрении динамических систем» [15]. Несколько позже (в 1934 г.) эта статья была переведена на немецкий язык [26]. В ней теоретически (с помощью уравнения Эйнштейна — Фоккера) исследовалось влияние случайных сил на неконсервативные системы, обладающие несколькими устойчивыми состояниями равновесия. Было вычислено математическое ожидание времени перехода из одного состояния в другое. «Детально исследовался ряд простейших случаев, представляющих интерес для теории

колебаний, в частности случай, когда динамические уравнения системы обладают предельным циклом Пуанкаре» [53].

Я. З. Цыпкин указывал, что это была «одна из первых работ в области статистической динамики нелинейных систем... В ней рассматривались две задачи: выяснение общего поведения системы при наличии случайных толчков и выделение из множества движений динамической системы тех движений, которые осуществляются с наибольшей вероятностью при наличии таких толчков. Как современно звучат эти формулировки, несмотря на их сорокалетний возраст! Подобная задача по аналогии с рэлеевской задачей о движении «абсолютно пьяного человека в канале» названа задачей о плавании «абсолютно пьяного человека в канале, где существуют регулярные течения». Эти образные названия очень памятны тем, кто слушал андроновские лекции» [86]. Работу «О статистическом рассмотрении динамических систем», а также работы Берштейна и Горелика [87, 88], продолжившие и развившие ее идеи, с полным правом называют классическими и пионерскими [42]. На них тем или иным образом опираются многочисленные исследования флуктуационных явлений в автоколебательных системах.

Значительным вкладом Витта в теорию колебаний был цикл работ по распределенным автоколебательным системам. В первой работе этого цикла [21, 22] автор исследовал двухпроводную линию, к одной стороне которой присоединена емкость, а к другой — нелинейное сопротивление. Положительное сопротивление считалось распределенным по всей длине системы. В отсутствие внешних сил первоначальное распределение обертонов (благодаря сосредоточенной емкости) неэквидистантно. Дифференциальные уравнения движений системы решались методом, аналогичным методу малого параметра для систем с конечным числом степеней свободы. Были выведены условия самовозбуждения, найдены периодические решения и исследована их устойчивость по Ляпунову. Оказалось, что в системе могут существовать стационарные почти синусоидальные колебания различных обертонов, причем систему можно «перебрасывать» из одного состояния в другое. Упомянувшееся выше экспериментальное исследование этих явлений было проведено в НИИ Физики МГУ Г. А. Бендриковым и Н. Браило [32], а также В. И. Гапоновым в ГФТИ.

Статью Витта «Распределенные колебательные системы» [21, 22] Андронов и Горелик назвали «замечательным теоретическим исследованием, посвященным автоколебаниям распределенных систем» [89]. Продолжил это исследование С. П. Стрелков [90].

Система с эквидистантным распределением собственных колебаний исследовалась Виттом на примере скрипичной струны, возбуждаемой смычком [31, 33, 34]. Было показано, что колебания с точностью до некоторого статического смещения имеют вид бегающих треугольников (или «гельмгольцевскую» форму, так как подобные колебания были получены экспериментально еще Гельмгольцем). Кроме основного тона, возможны унтертоновые колебания, т. е. колебания с периодом, являющимся целым кратным периодом основного тона струны без смычка. Унтертоны высших порядков представляют собой релаксационные колебания струны, возбуждаемые при медленном движении смычка; они обязательно синхронизованы собственными колебаниями струны. Унтертоны низших порядков (на октаву или на две ниже основного колебания струны без смычка) наблюдал экспериментально Г. Д. Малюжинец [32]. Витт решал задачу математически строго, используя аппарат Кёнигса — Ламерея. Была составлена система функциональных уравнений, найдены ее стационарные решения и исследована их устойчивость. Почти одновременно с Виттом аналогичные методы применил В. М. Бовшеверов к исследованию безынерционных колебательных систем, в которых связь между отдельными частями осуществляется через бегущие волны. В дальнейшем аппарат Кёнигса — Ламерея, изложенный в работах Витта [31, 33] и Бовшеверова [91], широко использовался для исследования принудительной синхронизации генераторов разрывных колебаний [92].

Впоследствии Виттом были проведены дополнительные исследования колебаний скрипичной струны и сделана поправка к прежнему исследованию устойчивости [34].

В обзоре [32] указывалось, что к системам, рассмотренным Бовшеверовым, по природе возбуждения «примыкают системы, частью колебательного контура которых служат пути электронов, причем время пролета сравнимо с периодом возбуждаемых колебаний... Однако здесь дело осложняется тем обстоятельством, что для электронов время пролета не

постоянно, а зависит от напряжения в контуре; поэтому уравнения движения таких систем носят характер интегрофункциональных». Именно такую систему (диод с раскаленным катодом, присоединенный к колебательному контуру) рассматривал Витт в работе «Условия самовозбуждения дециметровых генераторов» [14, 27]. Были записаны уравнения движения электронов в диоде и уравнения для тока в колебательном контуре. Исследовалась устойчивость по Ляпунову решения, соответствующего основному тону. Получены условия самовозбуждения различных обертонов и выражения для ширины полос самовозбуждения. В отличие от систем Бовшеверова, данная система обладает значительной «инерцией», и колебания почти синусоидальны.

Работы А. А. Витта по распределенным автоколебательным системам открыли новое направление в теории колебаний. Они продолжают оставаться актуальными и широко используются в современных исследованиях.

Так же тесно связана с современными проблемами теории колебаний и физики вообще работа Витта и Горелика «Колебания упругого маятника как пример колебаний двух параметрически связанных линейных систем» [16]. Эта работа возникла как попытка объяснить с точки зрения классической механики эффект расщепления линий в спектре комбинационного рассеяния на молекуле CO_2 . Горелик рассказывает [93], как однажды Мандельштам поделился в лаборатории колебаний впечатлениями о только что вышедшей работе Э. Ферми с квантово-механическим объяснением эффекта. Мандельштам предположил, что это явление — не специфически квантовое, и предложил проверить это на простейшей модели пружинного маятника — груза, висящего на пружине. Далее Горелик вспоминает:

«Со свойственным ему, я бы сказал, моцартовским отсутствием видимого усилия, А. А. Витт моментально рассчитал (методом секулярных возмущений небесной механики в том виде, в котором он был приспособлен для нужд старой квантовой теории) движение такой системы и показал, что при соотношении частот $2 : 1$ должна наступать периодически полная перекачка энергии из вертикальных колебаний в горизонтальные и обратно, что и подтвердилось несколько минут спустя после того, как я пошел в физический кабинет и завладел там штативом, пружиной и равновесом. Я теперь могу только удивляться тому, что это эффектное явление давно не

стало общеизвестным. Когда я стал читать курс общей физики, я убедился в том, что от него трудно избавиться (так как область параметрического резонанса при малом затухания — очень широка), и мне приходилось заботиться о том, чтобы оно не наступало каждый раз, когда я хотел проиллюстрировать с помощью груза и пружины обычную теорию колебаний системы с одной степенью свободы».

В названной работе [16] Витт и Горелик рассматривают пружинный маятник как пример двух параметрически (нелинейно) связанных линейных систем. Система описывается двумя нелинейными дифференциальными уравнениями, которые исследуются посредством введения малого параметра и энергетически на фазовой плоскости. Показано, что как бы ни была мала связь между парциальными системами, при отношении частот 2:1 в системе происходит полная перекачка энергии угловых колебаний в энергию вертикальных и обратно. При этом быстрота и глубина перекачки энергии из одной парциальной системы в другую зависит от начальных условий. Возможны начальные условия, при которых перекачка энергии совершенно отсутствует (периодические решения) и где парциальные системы ведут себя как связанные. Рассмотренная система служит примером того, как осторожно надо подходить к пренебрежению членами высокого порядка малости в методе малого параметра. Так, в системе, описывающей пружинный маятник, отбрасывание кубических членов привело бы к заключению, что угловые и вертикальные колебания независимы. «Идея параметрической связи получила дальнейшее применение в параметрических машинах, при исследовании сложных ламповых контуров, в акустике. Она... имеет отношение и к теории теплопроводности твердых тел, где рассматривается нелинейная связь между нормальными колебаниями кристаллической решетки» [93].

В 1935 г. Горелик применил аналогичное рассмотрение к анализу параметрического взаимодействия между стоячими звуковыми волнами в ограниченном объеме газа [94]. Было показано, что благодаря параметрической связи в системе возможно умножение или деление частоты. В том же году исследовался ламповый автогенератор с двумя определенным образом включенными контурами [95]. При соотношении парциальных частот 2:1 между ними наступало параметрическое взаимодействие. Это явление обусловлено нелинейностью характеристики лампы и принципиально

отличается от параметрического резонанса в линейных системах (происходящего только при соотношении частот 1:1). К исследованию параметрического резонанса в автоколебательных системах с двумя степенями свободы вновь обратились в 1961 г. Р. В. Хохлов и Ю. В. Григорьев [96].

К началу 60-х годов относится становление новой перспективной области физики — нелинейной оптики. Появление нелинейных задач в оптике связано прежде всего с достижениями квантовой электроники (созданием лазеров). Теоретической же основой молодой науки послужил математический аппарат, разработанный в нелинейной теории колебаний применительно к радиофизическим системам. Оказалось, что многим «сосредоточенным» параметрам и временным переменным в колебательных радиофизических системах можно указать соответствующие пространственно-временные аналоги среди «распределенных» параметров и пространственно-временных переменных в волноводных оптических системах. «Пространственно-временная аналогия может оказаться полезной при поисках новых нелинейных эффектов в оптике... Идя по этому пути, можно построить, например, волновой аналог явления захватывания частоты, играющего весьма важную роль в радиотехнике систем с сосредоточенными постоянными. Волновым аналогом захватывания является, очевидно, изменение фазовой скорости волны, распространяющейся в среде с диссипативной нелинейностью, связанное с воздействием на среду стороннего поля. Примеры подобного типа можно умножить...» [97].

В этом смысле все исследования в области нелинейных колебаний, в том числе фундаментальные работы Андронова и Витта по теории захватывания, проведенные в тридцатые годы, получили новую жизнь и современное развитие. Исследование же Виттом и Гореликом колебаний пружинного маятника [16] имеет самое непосредственное отношение к нелинейной оптике. Пространственно-временным аналогом взаимодействия между угловыми и вертикальными колебаниями пружинного маятника является взаимодействие между двумя гармониками (основной и второй) при распространении волн в нелинейной диспергирующей среде. Подобное взаимодействие исследовал Р. В. Хохлов в одной из своих первых работ в области нелинейной оптики [98]. Таким образом, можно сказать, что работа Витта и Горелика о колебаниях

пружинного маятника находится у самых истоков нелинейной оптики, несмотря на то, что между этими исследованиями прошли десятилетия.

Глубокое проникновение идей и методов теории нелинейных колебаний в нелинейную оптику обусловлено той «интернациональной сущностью теории колебаний, которую неоднократно подчеркивал Мандельштам. По воспоминаниям Андронова [41], Леонид Исаакович пояснял это следующим образом. Каждая из областей физики — оптика, механика, акустика говорят на своем, «национальном», языке. Но есть «интернациональный» язык — это язык теории колебаний. Она вырабатывает свои специфические понятия, свои методы, свой универсальный язык. «Интернационализм» теории колебаний придает ей колоссальное значение. Изучая одну область, вы получаете тем самым интуицию и знание в совсем другой области. «Темные места в оптике, — говорил Мандельштам, — освещаются, как прожектором, при изучении колебаний в механике и т. д.». Предмет изучения теории колебаний — колебательные процессы, независимо от их физической природы, т. е. от того, где они наблюдаются: в механике, акустике, радиотехнике, автоматике, аэродинамике, оптике, астрономии, химии или, наконец, в биологии и социологии.

В 1934 г. Витт совместно с биологом Г. Ф. Гаузе опубликовал работу, посвященную периодическим колебаниям численности особей биологических популяций [25], где была представлена математическая модель взаимодействия между двумя видами по схеме «хищник — жертва». Одними из первых моделей подобных взаимодействий были модели А. Лотка и В. Вольтерра, описывающие незатухающие колебания в системе вблизи равновесия. Гаузе и Витт определенным образом усложнили модель Лотка — Вольтерра, получив релаксационные колебания численности популяций (при непрерывном внешнем воздействии). Результаты хорошо согласовывались с экспериментальными данными. Дальнейшие исследования взаимодействия между хищниками и жертвами (теоретические и экспериментальные) представлены в статье [30], опубликованной в 1936 г. Виттом совместно с Гаузе и Смарагдовой.

Особенно важное значение для математической экологии имела работа Витта, опубликованная им совместно с Гаузе в 1935 г. в международном биологическом журнале «The American Naturalist» [29]. Здесь впервые было

показано, что, в зависимости от значений коэффициентов борьбы за существование между видами, осуществляется либо полное вытеснение одного вида другим (принцип конкурентного исключения), либо бесконечно долгое независимое существование двух видов, либо их симбиоз. Выводы этой работы вошли во многие учебники экологии, и через тридцать лет после ее опубликования, в 1964 г., она была переиздана в сборнике классических работ по математической экологии, опубликованном в США и Англии [38].

Основные работы в области нелинейных колебаний в Советском Союзе до 1935 г. были представлены в обзоре [28]. Первоначально обзор был написан в виде доклада Лондонскому конгрессу Международного радиотехнического союза. Затем доклад был опубликован на французском языке [28]. В 1936 г. его опубликовали в значительно дополненном виде под названием «Новые исследования нелинейных колебаний» [32]. Одним из его авторов был А. А. Витт.

Впервые детально и систематически основы теории нелинейных колебаний были изложены в монографии Андронова, Витта и Хайкина «Теория колебаний». Первое издание книги вышло в 1937 г. [35]. В монографии изложены основы математического аппарата теории нелинейных колебаний: качественная теория дифференциальных уравнений первого и второго порядков; метод малого параметра (в случае колебаний, близких к синусоидальным, и в случае разрывных колебаний); метод точечных преобразований; основы теории устойчивости. «Исследования авторов, несомненно, сыграли весьма существенную роль в приспособлении этого аппарата для изучения колебательных проблем. Ими же были применены эти методы для решения ряда новых конкретных задач. Их же работами подведена солидная математическая база и под результаты других авторов, результаты... весьма ценные, но разрозненные и до сих пор такой базы не имеющие», — писал Л. И. Мандельштам в предисловии к первому изданию «Теории колебаний». Авторы ограничились применением разработанного математического аппарата к простейшему случаю автоколебательных систем — к автономным системам с одной степенью свободы. Это вызвано, с одной стороны, большим объемом материала по нелинейным колебаниям даже для этого ограниченного класса систем. С другой стороны, как отмечал Мандельштам в предисловии: «Автономные системы с одной степенью

свободы — наиболее простые системы, и они в то же время являются теми элементами, которые лежат в известном смысле в основе всех более сложных систем. Теоретический аппарат, необходимый для рассмотрения этих последних, базируется на тех общих положениях, которые изложены здесь и представляют собой его дальнейшее развитие. Таким образом, хотя в настоящей книге разобран сравнительно узкий цикл вопросов, по существу она является введением в общую теорию нелинейных колебаний» [35].

Книга быстро получила широкую известность. Она стала учебником для студентов и настольной книгой для специалистов по нелинейным колебаниям, причем в самых различных областях знаний. С монографией тем или иным образом связаны все последующие исследования нелинейных колебаний [99—101]: распределенные радиофизические системы, автоматическое регулирование, нелинейная оптика, оптические квантовые генераторы, ускорители, теория дифференциальных уравнений, дальнейшее развитие качественной теории динамических систем, теория устойчивости, синхронизации; изучение колебательных процессов в биологии и химии и т.д. Монография известна далеко за пределами нашей страны. В 1947 г. в США вышла книга Н. Минорского [102], значительная часть которой является простым изложением (с четким указанием источника) ряда глав «Теории колебаний» [53]. «Теория колебаний» переведена на немецкий [39] и английский [36, 40] языки, была повторно издана в 1959 г. в Советском Союзе [37].

Вклад, внесенный А. А. Виттом в создание, разработку и использование общей теории колебаний, — многогранный и значительный. Им выполнены основополагающие работы, которые привели к образованию ряда новых важных направлений в теории колебаний. Эти работы и сейчас актуальны и широко используются в современных исследованиях. Работы А. А. Витта еще долго будут служить источником идей и образцом научных исследований.

Авторы искренне благодарны Елене Густавовне Эйгес, сыну Александра Адольфовича Александру Александровичу Витту, проф. С. А. Ахманову, акад. АМН СССР Г. Ф. Гаузе, проф. М. Д. Карасеву, проф. Е. А. Леонтович, чл.-корр. АН СССР В. В. Мигулину, доц. И. И. Минаковой, проф. Г. Б. Петросяну, акад. АН КиргССР П. А. Рязину за помощь и пожелания, высказанные при ознакомлении с материалами статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Predwodilelew A., Witt A.* Zur Frage nach der photoelektrischen Ermüdung. — «Z. für Phys.», 1926. Bd 35, S. 783—791.
2. *Vumm A. A.* Двухпроводная антенна Бевереджа. — «Журн. прикл. физики», 1926, т. 3, вып. 3—4, с. 317—328.
3. *Предводителев А. С., Vumm A. A.* К кинетике химических реакций твердой и газообразной компонент, ведущих к образованию комплексных соединений. — «Журн. прикл. физики», 1927, т. 4, вып. 3, с. 67—74.
4. *Predwoditelew A., Witt A.* Zur Kinetik chemischer Reaktionen zwischen einer festen und einer gasförmigen Komponente, die zur Bildung komplexer Verbindungen führen. — «Z. für Phys. Chem», 1928, Bd 135, S. 47—54.
5. *Vumm A. A.* Неоднородная нагруженная антенна. — «Журн. прикл. физики», 1928, т. 5, вып. 1, с. 3—21.
6. *Andronoff A., Witt A.* Zur Theorie des Mitnehmens von van der Pol. — «Archiv für Elektrotechnik», 1930. Bd XXIV, S. 99—100. (*Андронов А. А.* Собр. трудов — М.: Изд-во АН СССР, 1956, с. 51—64.)
7. *Andronow A., Witt A.* Sur les mouvements quasiperiodiques. — «Журн. прикл. физики», 1930, т. 7, вып. 1, с. 119—122. (*Андронов А. А.* Собр. трудов, с. 47—50.)
8. *Андронов А. А., Vumm A. A.* К математической теории захватывания. — «Журн. прикл. физики», 1930, т. 7, вып. 4, с. 3—20. (*Андронов А. А.* Собр. трудов, с. 70—84.)
9. *Andronow A., Witt A.* Sur la Théorie mathématique des autooscillations. — «Comptes Rendus Acad. Sci. Paris», 1930, vol. 190, N 4, p. 256—258. (*Андронов А. А.* Собр. трудов.)
10. *Andronoff A., Witt A.* Unstetige periodische Bewegungen und Theorie des Multivibrators von Abraham und Bloch. — ДАН, Сер. Н, 1930, № 8, с. 189—192. (*Андронов А. А.* Собр. трудов, с. 65—69.)
11. *Vumm A. A., Шубин С. П.* О тонах мембраны, закрепленной в конечном числе точек. — «Журн. техн. физики», 1931, т. 1, № 2—3, с. 163—176.
12. *Vumm A. A., Хайкин С. Э.* Захватывание при малых амплитудах внешней силы. — «Журн. техн. физики», 1931, т. 1, № 5, с. 428—434.
13. *Witt A.* Sur la stabilite du mouvement quasiperiodique. — «Comptes Rendus Acad. Sci., Paris», 1932, vol. 195, N 12, p. 101—103.

14. *Witt A.* Sur l'amorçage des oscillations de tres haute frequence. — «Comptes Rendus Acad. Sci., Paris», 1932, vol. 195, N 22, p. 1005—1007.
15. *Понтрягин Л. С., Андронов А. А., Витт А. А.* О статистическом рассмотрении динамических систем. — ЖЭТФ, 1933, т. 3, вып. 3, с. 165—180. (*Андронов А. А.* Собр. трудов, с. 142—160.)
16. *Витт А. А., Горелик Г. С.* Колебания упругого маятника как пример двух параметрически связанных линейных систем. — «Журн. техн. физики», 1933, т. 3, № 2—3, с. 294—307.
17. *Андронов А. А., Витт А. А.* Об устойчивости по Ляпунову. — ЖЭТФ, 1933, т. 3, вып. 5, с. 373—374. (*Андронов А. А.* Собр. трудов, с. 140—141.)
18. *Andronoff A., Witt A.* Zur Stabilität nach Liapunow. — «Phys. Zeitschrift der Sowjetunion», 1933, Bd 4, S. 606—608.
19. *Витт А. А., Хайкин С. Э., Майзельс Е. Н.* Прямой метод измерения напряженности поля передающих станций.— «Изв. электропромышленности слабого тока», 1933, № 3, с. 1—7.
20. *Витт А. А.* Об асинхронном возбуждении. К работе Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси.—«Журн. техн. физики», 1934, т. 4, № 1, с. 109—110.
21. *Витт А. А.* Распределенные автоколебательные системы. — «Журн. техн физики», 1934, т. 4, № 1, с. 144—157.
22. *Witt A.* Autoschwingungen in kontinuierlich vorteilen System. — «Phys. Zeitschrift der Sowjetunion», 1934, Bd 5, S. 777—795.
23. *Andronow A., Witt A.* Sur la Theorie mathematique des Systèmes autooscillations á deux Degrès de Liberté. — «Techn. Phys. of USSR», 1934, vol. 1, p. 249—271.
24. *Андронов А. А., Витт А. А.* К математической теории автоколебательных систем с двумя степенями свободы. — «Журн. техн. физики», 1934, т. 4, № 1, с. 122—143. (*Андронов А. А.* Собр. трудов, с. 161—182.)
25. *Гаузе Г. Ф., Витт А. А.* О периодических колебаниях численности популяции: математическая теория релаксационного взаимодействия между хищниками и жертвами и ее применение к популяции двух простейших.—«Изв. АН СССР. Сер. 7», 1934, с. 1551—1559.
26. *Pontrjagin L., Andronoff A., Witt A.* Statistische Auffassung dynamischer sisteme. — «Phys. Zeitschrift der Sowjetunion», 1934, Bd 6, S. 1—24.
27. *Витт А. А.* Условия самовозбуждения дециметровых генераторов. — «Уч. зап. МГУ», 1934, вып. II, с. 133—135.

28. *Mandelstam L., Papalexi N., Andronow A., Chaikin S., Witt A.* Exposé des recherches récentes sur les oscillations non linéaires. — «Techn. Phys. of the USSR», 1935, vol. 2, p. 81—134.
29. *Gause G. P., Witt A. A.* Behavior of mixed populations and the problem of natural selection. — «The American Naturalist», 1935, v. LXIX, p. 596—609.
30. *Gause G. P., Smaragdova N. P., Witt A. A.* Further studies of interaction between predators and prey. — «J. Animal Ecology», 1936, p. 1—18.
31. *Vitt A. A.* К теории скрипичной струны. — «Журн. техн. физики», 1936, т. 6, вып. 9, с. 1459—1479.
32. *Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д., Андронов А. А., Витт А. А., Горелик Г. С., Хайкин С. Э.* Новые исследования нелинейных колебаний. — М.: Гос. изд-во по вопросам радио, 1936.
33. *Witt A.* Sur la Théorie de la cord de Violon. — «Techn. Phys. of USSR», 1937, v. 4, p. 261—288.
34. *Витт А. А.* Дополнение и поправки к моей работе «Колебания скрипичной струны». — «Журн. техн. физики», 1937, т. 7, вып. 5, с. 542—545.
35. *Андронов А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. Часть I. С предисловием акад. Л. И. Мандельштама. — М.—Л.: ОНТИ, 1937.
36. *Andronov A. A., Chajkin S. E.* Theory of oscillation. (Transl. by S. Lefschetz.) Princeton Univ. Press, 1949.
37. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. Изд. 2-е, перераб. и дополн. Н. А. Железцовым. — М.: Физматгиз, 1959.
38. *Gause G. F., Witt A. A.* Behavior of mixed populations and the problem of natural selection. — In: Readings in population and community ecology. Philad. and Lond., 1964, p. 108—121.
39. *Andronoff A. A., Witt A. A., Chaikin S. E.* Theory der Schwingungen. Teil I, II. Berlin, 1965.
40. *Andronov A. A., Witt A. A., Chajkin S. E.* Theory of oscillator. — L., 1966, p. 816.
41. *Андронов А. А., Л. И. Мандельштам* и теория нелинейных колебаний. — «Изв. АН СССР. Сер. физич.», 1945, т. IX, № 1—2, с. 30—65.
42. *Мигулин В. В.* Радиофизика. — В кн.: Развитие физики в СССР, т. I. — М.; Наука, 1967, с. 209—232.
43. *Скибарко А. П., Стрелков С. П.* Качественное исследование процессов в генераторе по сложной схеме. К теории затягивания по Ван-дер-Полю. — «Журн. техн. физики», 1934, т. 4, № 1, с. 158—171.

44. *Секерская Е. Н.* Регенеративный приемник с жестким режимом. — «Журн. техн. физики», 1935, т. 5, № 2, с. 253—280.
45. *Рязин П. А.* Процессы установления колебаний в автоколебательной системе при явлениях полного и частичного увлечения частоты. — «Журн. техн. физики», 1935, т. 5, № 1, с. 38—52.
46. *Рязин П. А.* О «внутреннем механизме» явлений принудительной синхронизации и «тушения» в автоколебательной системе, находящейся под действием гармонической ЭДС. Автореф. канд. дис. Физ. фак. МГУ, 1934.
47. *Безменов А. Е.* Теория «Райс» — диаграмм Рукопа. Автореф. канд. дис. Физ. фак. МГУ, 1938.
48. *Предводителев А. С.* Кафедра молекулярной физики. — В кн.: История и методология естественных наук. Физика, вып. VI. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1968, с. 39—85.
49. *Бендриков Г. А., Горелик Г. С.* Применение Брауновской трубки к исследованию движения изображающей точки на плоскости переменных Ван-дер-Поля. — «Журн. техн. физики», 1935, т. 5, № 4, с. 620—626.
50. *Самарский А. А.* О влиянии закрепления на собственные частоты замкнутых объемов. Автореф. канд. дис. Физ. фак. МГУ, 1948.
51. *Неймарк Ю. И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных систем. — В кн.: Механика в СССР за 50 лет, т. 1. Общая и прикладная механика. — М.: Наука, 1968.
52. *Андронов А. А.* Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний. — В кн.: Доклады IV съезда русских физиков. — М., 1927, с. 23—24.
53. *Андронов А. А.* Собр. трудов. Библиография трудов.
54. *Теодорчик К. Ф., Хайкин С. Э.* Акустическое захватывание. — «Журн. техн. физики», 1932, т. 2, № 1, с. 111—118.
55. *Теодорчик К. Ф., Секерская Е. Н.* Прибор для абсолютного измерения интенсивности звука по методу акустического захватывания. — «Журн. техн. физики», 1934, т. 4, № 5, с. 1009—1013.
56. *Петросян Г. Б., Рязин П. А., Теодорчик К. Ф.* Фазовые соотношения при захватывании. — «Журн. техн. физики», 1933, т. 3, № 7, с. 1051—1833.
57. *Рязин П. А.* О механизме возникновения принудительной синхронизации. — «Журн. техн. физики», 1935, т. 5, № 10, с. 1809—1833.
58. *Безменов А. Е.* Методы Баркгаузена—Меллера с точки зрения строгой теории автоколебаний. — «Журн. техн. физики», 1936, т. 6, № 3, с. 447—473.

59. *Безменов А. Е.* Теория диаграмм «срыва» Рукопа.— «Электросвязь», 1938, № 4, с. 13—30.
60. *Петросян Г. Б.* Поведение автоколебательной системы под действием двух гармонических сил. — «Журн. техн. физики», 1935, т. 5, № 9, с. 1552—1562.
61. Вопросы истории естествознания и техники, журнал-сборник, вып. 4(45).—М.: Наука, 1973, с. 83—84.
62. *Хохлов Р. В.* К теории захватывания при малой амплитуде внешней силы. — ДАН, 1954, т. 97, № 3, с. 411.
63. *Хохлов Р. В.* Метод поэтапного упрощения укороченных уравнений и его применение к некоторым проблемам радиофизики. Автореф. докт. дис. Физ. фак. МГУ, 1961.
64. *Бендриков Г. А., Карасев М. Д., Мигулин В. В.* Физика колебаний на физическом факультете Московского университета. — В кн.: История и методология естественных наук, вып. VII. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1968, с. 180—225.
65. *Коваленко А. С., Мигулин В. В.* О механизме синхронизации автоколебаний томсоновских систем. — «Вестн. Моск. ун-та», 1971, № 3, с. 314—323.
66. *Гуляев В. П., Мигулин В. В.* Об устойчивости колебательных систем с периодически изменяющимися параметрами. — «Журн. техн. физики», 1934, т. 4, № 1, с. 49—65.
67. *Минакова И. И., Теодорчик К. Ф.* К теории синхронизации автоколебаний произвольной формы. — ДАН, 1956, т. 106, вып. 4, с. 658.
68. *Берштейн И. Л., Иконников Е.* К математической теории вынужденных колебаний в автоколебательных системах с двумя степенями свободы.— «Журн. техн. физики», 1934, т. 4, № 1.
69. *Привалов В. Е., Фридрихов С. А.* Кольцевой газовой лазер.— УФН, 1969, т. 97, вып. 3, с. 377—402.
70. *Рязин П. А.* Исследование захвата электронов в ускорение в бетатронах и синхротронах. — В кн.: Ускорители. М.: Атомиздат, 1960, с. 59—104.
71. *Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д.* К теории асинхронного возбуждения. — «Журн. техн. физики», 1934, т. 4, № 1, с. 98—108.
72. *Рытов С. М.* Резонанс n -го рода в системе с двумя степенями свободы в случае сильной связи. — «Журн. техн. физики», 1935, т. 5, № 1, с. 3—37.
73. *Отроков Н. Ф.* К устойчивости периодических интегралов. — «Уч. зап. Горьк. ун-та», 1938, т. 6.
74. *Малкин И. Г.* Об устойчивости периодических решений динамических систем. — «Прикл. математика и механика», 1944, т. 8, № 4.

75. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1964.
76. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966.
77. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
78. *Лёттов А. М.* Состояние проблемы устойчивости в теории автоматического регулирования. — В кн.: Труды II Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. — М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1955, т. 1.
79. *Лошаков Л. Н., Хайкин С. Э.* «Разрывные» колебания в схеме с емкостью и самоиндукцией. — «Журн. техн. физики», 1935, т. 5, № 5, с. 832—843.
80. *Виткевич В. В.* Теория синхронизации релаксационных генераторов на унтертонах внешней ЭДС. Автореф. канд. дис. Физ. фак. МГУ, 1944.
81. *Карасев М. Д., Селезнева М. Л.* Переходные процессы в мультивибраторе при различных режимах. — «Вестн. Моск. ун-та», 1954, вып. 5, № 10, с. 33—42.
82. *Железцов Н. А., Родыгин Л. В.* К теории симметричного мультивибратора. — ДАН, 1951, т. LXXXI, № 3.
83. *Горелик Г. С.* Жизнь и труды А. А. Андропова. — В кн.: Памяти А. А. Андропова. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.
84. *Папалекси Н. Д.* Международная нелинейная конференция (Париж, 28—30 января 1933 г.). — «Журн. техн. физики», 1934, т. 4, № 1, с. 209—213.
85. *Боголюбов Н. Н.* Колебания. — В кн.: Механика в СССР за тридцать лет. — М.—Л., 1950.
86. *Цыпкин Я. З.* А. А. Андронов и теория автоматического управления. — «Автоматика и телемеханика», 1974, № 5, с. 5—10.
87. *Берштейн И. Л.* О флуктуациях вблизи периодического движения автоколебательной системы. — ДАН, 1938, т. XX, № 1, с. 11—16.
88. *Горелик Г. С.* К вопросу о технической и естественной ширине линии лампового генератора. — ЖЭТФ, 1950, т. 20, вып. 4, с. 351—355.
89. *Андронов А. А., Горелик Г. С.* Радиоп физика и общая динамика машин. — «Изв. вузов. Радиоп физика», 1958, № 1.
90. *Strelkov S. P.* Zur Theorie Schwingungserzeugung in Lecher system. — «Techn. Phys. USSR, 1935, v. VII, N 2—3.
91. *Бовшеверов В. М.* О некоторых колебательных системах, приводящих к функциональным уравнениям. — «Журн. техн. физики», 1936, т. 6, № 9.

92. Папалекси Н. Д., Андронов А. А., Горелик Г. С., Рытов С. М. Некоторые исследования в области нелинейных колебаний, проведенные в СССР, начиная с 1935 г. — УФН, 1947, т. XXXIII, вып. 3.
93. Горелик Г. С. Л. И. Мандельштам и учение о резонансе. — «Изв. АН СССР, сер. физическая», 1946, т. IX, № 1—2, с. 61—76.
94. Горелик Г. С. О параметрической связи между стоячими акустическими волнами в газах. — «Журн. техн. физики», 1935, т. 8, вып. 8, с. 1436—1439.
95. Турбович И. Т. Явление параметрической связи в сложной автоколебательной системе. — «Журн. техн. физики», 1935, т. 5, № 7, с. 1284.
96. Григорьев Ю. В., Хохлов Р. В. Об автогенераторе, параметрически связанном с линейным контуром. — «Радиотехника и электроника», 1961, т. 6, вып. 10.
97. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики (электромагнитные волны в нелинейных диспергирующих средах). — М.: Изд-во АН СССР, 1964.
98. Хохлов Р. В. О распространении волн в нелинейных диспергирующих линиях. — «Радиотехника и электроника», 1961, № 7, с. 1116—1127.
99. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1952.
100. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. — М.: Наука, 1964.
101. Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Основы теории колебаний. — М.: Наука, 1978.
102. *Minorsky N.* Introduction to Non-linear Mechanics. — Ann-Arbor, 1947.

Bendrikov G.A., Sidorova G.A.

Aleksandr Adolfovich Witt

Article contains the description of the life and work of A. A. Witt — the one of the distinguished representatives of the L. J. Mandelstam and N. D. Papalexi school. A. A. Witt (independently and with other authors, in particular with A. A. Andronov) made big cycle of various works about investigation of oscillating processes in the systems which are linear or nonlinear with quasiharmonic and relaxation oscillations, autonomic ones and under the action of the external fields. The Witt's works, containing the analysis of stability of autooscillations, statistical

investigation of the dynamical systems, investigation of distributing systems with parametric bonds, oscillating processes in biology, etc. — initiated new branches of science.

*Источник: Г.А.Бендриков, Г.А.Сидорова. Александр Адольфович Витт
// История и методология естественных наук. Вып. XXVI. Физика.
Изд-во МГУ, 1981, с.150-168.*